10/10/19

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Ένα μεγάλο μέρος των προβλημάτων περιγρ. από Δ.Ε.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ονομάζουμε Δ.Ε την εξίσωση που περιέχει τόσο την άγνωστη συνάρτηση. π.χ $f(x)$, όσο και τις παραγώγους n-τάξης.

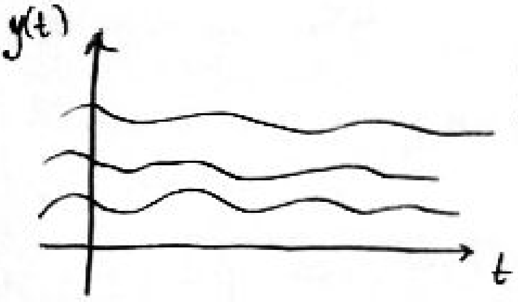
π.χ $f^{(n)}(x)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right.$ ή $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right.$ κτ.λ.)

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^1 = y'(t) = f(y,t) \quad , y = y(t)$$

: ΣΔΕ. 1ης τάξης, 1ου βαθ.
η γραμμικότητα εξαρτάται από την f, και η ομογένεια

Επίλυση

$$\int y'(t)\,dt = \int f(y,t)\,dt \Rightarrow y(t) = \int f\,dt + c$$ γενική λύση



για να επιλέξω ποια λύση θα χρειαστώ μια συνθήκη:

Πρόβλημα Αρχικών Τιμών

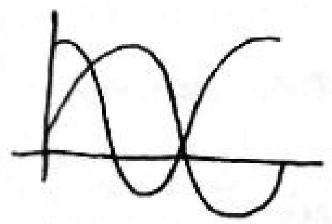
$$y(a) = y_0 \quad , t \in [a,b]$$

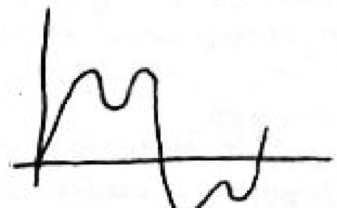
Π.Α.Τ. $$\begin{cases} y'(t) = f(y(t),t) \quad , t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

π.χ $y''(t) = -ky(t)$, $k>0$, $t \in \mathbb{R}^*$ (απλός αρμονικός ταλαντωτής)

Επίλυση : με χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$y(t) = A\cos(\sqrt{k}t) + B\sin(\sqrt{k}t)$$





Θέτω $y' = x$

$$\begin{cases} y' = x \\ x' = -ky \end{cases}$$ Σύστημα $1^{ης}$ τάξης ΣΔ.Ε.

βάζουμε αρχικές συνθήκες: για $t \in [a,b]$ $y(a) = y_0$, $y'(a) = y_1$

και παίρνουμε:

$$\begin{cases} y' = x \\ x' = -ky \\ y(a) = y_0 \\ x(a) = y_1 \end{cases}$$ ↦ υπάρχει σύζευξη

(Lotka - Volterra)

πρόβλημα L-V

$$\begin{cases} x' = axy + \beta x \\ y' = axy + \gamma y \end{cases}$$ Σ.Δ.Ε, $1^{ης}$ τάξη $1^{ου}$ βαθμού μη γραμμικό ομογενές (*)

$x = x(t)$
$y = y(t)$

(ντετερμινιστικό υπακούει κάποιους νόμους.)

αν $a \to 0$

$$\begin{cases} x' = \beta x \\ y' = \gamma y \end{cases}$$ λύση $x(t) = C_1 e^{\beta t}$, $y(t) = C_2 e^{\gamma t}$

↳ δεν έχει σύζευξη

(*) έχουμε συνεχές, θα περάσουμε στο διακριτό (για να λύσουμε το σύστημα)

οπίσθιες διαφορές: $y' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(n+1) - y(n)}{\Delta t}$ άρα $y' \simeq \frac{y(n+1) - y(n)}{\Delta t}$

Αριθμητικές μέθοδοι:

πόσα βήματα κάνεις:
- βηματικές
- πολυβηματικές
- μονοβηματικές μέθοδοι

a ... t^{n-1} (y^{n-1}) ... t^n (y^n) ... b

(a) Runge - Kutta (~1900): μονοβηματ. εκτός εσωτερική διαμέριση για μεγαλύτερη ακρίβεια

(1) μονοβημ. / πολυβημ.

(2) άμεση / πεπλεγμένη → δεν αρκεί η προηγούμ. θέλω επιπλέον πληροφορία την παρούσα ή την μελλοντική.

{αρκεί να ξέρω την προηγούμενη y^{n-1}}

(3) {χρειάζεσαι σύστημα πεπλεγμένο} ← καλύτερη ευστάθεια, πιο κοντά στην αναλυτική λύση.

μερικές δ.ε.

Έστω $u(x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$

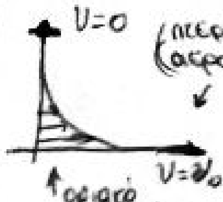
μερικ. ως προς x: $\frac{\partial u}{\partial x}$

-//- y: $\frac{\partial u}{\partial y}$

ολική μερικ.:

$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \bar{\nabla} u d\bar{r}$

κλίση / βαθμωτή.



πως διαχέει μια ουσία (π.χ. θερμοκρασία)

$u_x + u_y = c$

εξ. Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \bar{\nabla}^2 u = 0$$

(β) Χαμηλής τάξης ακρίβειας μονοβημ. μεθ. (π.χ Euler)

(γ) Πολυβηματικές μέθοδοι.

Εξετάζουμε:

(1) Υπαρξη λύσης

(2) Μοναδικότητα λύσης

(3) Εξάρτηση από αρχικά δεδομένα (Ευστάθεια)

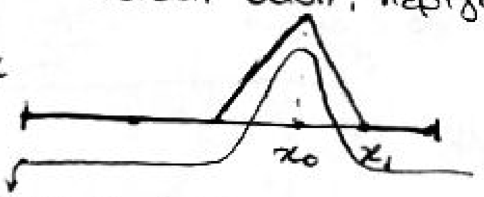
Προβλημα Συνοριακων Τιμων

$$\begin{cases} -u'' + qu = f \quad , u = u(t) \ , q, f \text{ είναι συν. συναρτ.} \quad , t \in [a,b] \\ u(a) = u(b) = u_0 \quad (\text{Dirichlet Σ.Σ.}) \end{cases}$$

Δύο τεχνικές για τη λυση: (1) Μεθοδος πεπερασμένων διαφορων
(2) Μεθοδος πεπερασμένων στοιχείων.

(2) Εχω συνεχή βάση, περιγράφω το χώρο με συνεχή τρόπο.

π.χ



συνεχη συνάρτηση, χωρίς συνεχη παράγωγο

2ου βαθμού με συνεχη παραγωγο

Αναπτυγμα Taylor

Έστω μια συνάρτηση $f(x)$, $n+1$ φορές παραγωγίσιμη στο $I \subseteq \mathbb{R}$ τότε (στη γειτονία) του $x_0 \in I$ μπορούμε να την προσεγγίσουμε:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x-x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0) + \underbrace{\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)}_{\text{Σφάλμα ή Υπόλοιπο της προσέγγισης}}$$

γραμμικοποίηση:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + R(\xi) \text{ ή}$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cong f'(x_0) + R(\xi)$$

Taylor για δύο μεταβλητές:

$f(x,y)$ έστω $(x_0, y_0) \in \underline{\Theta} \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

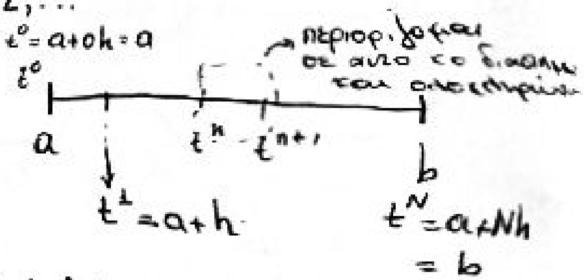
$$f(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)} = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)}(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}(y-y_0) +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(x_0,y_0)}(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{(x_0,y_0)}(y-y_0)^2 + \dots$$

υπολογίζω την f στην γειτονιά του x_0, y_0

Δουλεύω στο $[a,b]$, θεωρώ διαμέριση του διαστήματος: $h = \frac{b-a}{N}$ (βήμα διαμέρισης), $t^n = a + nh$, $n = 0, 1, 2, \dots$

$n=0$: $t^0 = a + 0h = a$



$$y'(t) = f(y,t) \overset{[t^n, t^{n+1}]}{\Rightarrow} \int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(y,t)\,dt$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) - y(t^n) = h f(y^n, t^n) \Rightarrow y^{n+1} = y^n + h f(y^n, t^n)$$

άμεση μέθοδος Euler (έχω ακολουθία ξέρω τον αναδρ. τύπο.)

ολοκληρωτικές μέθοδοι. (δουλεύει και σε συνεχή)

$$f \in C^0([a,b] \times \mathbb{R})$$

τότε $\forall\, y \in C^1([a,b])$ που ικανοποιεί τη ΔΕ (1) αποτελεί λύση του Π.Α.Τ.

Θέλω να προσδιορίσω το y.

Υπαρξη και Μοναδικοτητα

Αν η f είναι πολυωνυμο 1ου βαθμού

$f(y,t) = p(t)y(t) + q(t)$ τότε το

Π.Α.Τ. $\begin{cases} y' = py + q & , t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 & p, q \in C[a,b] \end{cases}$

τοτε η λύση της Δ.Ε είναι:

$$y(t) = e^{\int_a^t p(t)dt} \left[c + \int_a^t q(\tau) e^{-\int_a^s p(s)ds} d\tau \right]$$, Δ.Ε. 1ης ταξη γραμμ.

Παράδειγμα:

$\begin{cases} y' = y^2 & , t \in [0,2] \\ y(0) = 1 \end{cases}$

επιλυση:

$\frac{y'}{y^2} = 1 \Leftrightarrow -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{y}\right) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\int_0^t \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{y}\right)dt = \int_0^t 1\,dt \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y(t) = \frac{1}{1-t}$

αν $t \to 1$ τοτε απειρίζεται.

$t \to 1^-$

Άρα μπορώ να έχω λύση για τη διαφορική Εξίσωση στο $[0,1)$

Συμπέρασμα

(1) $\exists$ προβλ. που δεν ορίζεται λύση σε όλο το διαστημα

(2) που η λύση δεν είναι μοναδική.

Θεωρημα : Υπαρξη και μοναδικότητα λύσεων (για Σ.Δ.Ε.)

Εστω $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,συνεχής[1] συνάρτηση , πού[2] πληροί την συνθήκη Lipschitz ως προς y ,ομοιόμορφα ως προς t

$$\exists\, L \geq 0 ,\ \forall\, t \in [a,b] ,\ \forall\, y_1, y_2 \in \mathbb{R} : |f(y_1,t) - f(y_2,t)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Τοτε το πρόβλημα αρχ. τιμών , $\forall\, y_0 \in \mathbb{R}$, εχει μοναδική λυση.

Συμπέρασμα : Η συνθήκη Lipschitz είναι πολύ περιοριστική